Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 2 (3) (2014), 13-21

Занимљивости "ведске" математике

Саша В. Вукашиновић
Сурдулица
sasamikevukasinovic@gmail.com

У овом тексту ће бити речи о неким, веома атрактивним, техникама рачунања такозване "ведске" математике. "Ведска" математика је назив за стари индијски математички систем, боље речено, систем рачунања, за који се тврди да потиче из "веда", старих религијских списа из Индије у такозваном "ведском" периоду (1500.-500. пне.).

1. УВОД

Овај систем је западној цивилизацији постао познат 1965. године, објављивањем књиге индијског учењака и математичара *Bharati Krishna Tirthaji Maharaje* под насловом "Шеснаест једноставних математичких формула из веда". У тој књизи се описује велики број метода и поступака рачунања везаних за различите области класичне математике. Сам аутор је тврдио да све што је написано у тој књизи потиче из поменутих ведских списа и да се целокупна математика базира на шеснаест једноставних главних формула и четрнаест споредних. Многи оспоравају ове тврдње, јер чак и добри познаваоци ведског санскрита нису успели да пронађу у списима ниједну од ових "сутри". Овде се нећемо бавити детаљно начином употребе ових формула, нити како гласе, само ћемо изнети неке од најатрактивнијих метода.

2. МНОЖЕЊЕ

Можемо почети једним, наизглед шаљивим, питањем: Знате ли како се множе бројеви 9 и 6? Веће шаљивџије међу Вама би одговориле: Па, извадимо из џепа мобилни. Они који баш и немају смисла за хумор би се вероватно naљутили и рекли да научите таблицу множења пре него што се усудите да разговарате са њима, али хајде за тренутак да заборавимо да знамо таблицу множења целу већ само до 5 и да постоје рачунска помагала. Написаћемо ове бројеве један испод другог

9
6

а затим од најближе декадне јединице–базе одузети сваки број и разлику написати у колони поред, а испред тих разлика написати знак – ако је декадна јединица мања од броја или знак + у супротном

Подвучемо и додамо косе црте као што следи

$$\begin{array}{ll} 9 & +1 \\ 6 & +4 \\ \hline \end{array}$$

Резултат ће се састојати из два дела, први садржи разлику броја и остатка до базе другог броја, а други производ остатака ако су оба истог знака.

$$\begin{array}{ll} 9 & +1 \\ 6 & +4 \\ \hline \end{array}$$

$9-4\,|\,1\times 4 = 5\,|\,4 = 54$.

Размотримо сада мало сложенији пример. Тражимо производ, на пример, бројева 94 и 98. Најближа декадна јединица је 100, па ће нам то бити база.

$$\begin{array}{ll} 94 & +6 \\ 98 & +2 \\ \hline \end{array}$$

$98-6\,|\,2\times 6 = 92\,|\,12 = 9212$

Гле чуда, поново смо добили тачан резултат. Нека су сада бројеви које множимо 105 и 93. База нам је поново 100 али један је већи а други мањи од базе. Спроводимо исти поступак

$$\begin{array}{rl} 105 & -5 \\ 93 & +7 \\ \hline \end{array}$$

али сада је производ разлика негативан, па одузимамо од првог дела резултата као што следи

$$\begin{array}{rl} 105 & -5 \\ 93 & +7 \\ \hline \end{array}$$

$93-(-5)\,|\,-5\times 7 = 98\,|\,-35 = 9800-35 = 9765$

Ево још једног примера

$$\begin{array}{ll} 989 & +11 \\ 996 & +4 \\ \hline \end{array}$$

База је 1000 па ће други део резултата садржати 3 места.

$$\begin{array}{ll} 989 & +11 \\ \hline 996 & +4 \end{array}$$

$989-4\,|\,11\times 4 = 985\,|\,44 = 985000+44 = 985044$.

Надамо се да сте бар мало уживали у оваквом рачунању. Ево још неких трикова. Нека се ради о множењу два броја која нису близу неке декадне јединице али су близу неке друге базе нпр. 50.

$$\begin{array}{ll} 48 & +2 \\ \hline 44 & +6 \end{array}$$

Поступак је скоро исти

$$\begin{array}{ll} 48 & +2 \\ \hline 44 & +6 \end{array}$$

$48-6\,|\,2\times 6 = 42\,|\,12$

Али како је 50 двоструко мање од базе 100 први део резултата поделимо са 2, док други део остаје исти са бројем места као у бази 100.

$48-6\,|\,2\times 6 = 42\,|\,12 \Rightarrow 42:2\,|\,12 = 21\,|\,12 = 2112$.

Сигурно се питате шта ако у првом делу резултата добијемо број који није дељив бројем 2. Ево примера

$$\begin{array}{ll} 48 & +2 \\ \hline 43 & +7 \end{array}$$

$48-7\,|\,2\times 7 = 41\,|\,14$.

Сада 41 није дељив са 2, али $41:2 = 20\frac{1}{2}$. Ова половина означава половину базе, а то је 50, коју преносимо у други део резултата и саберемо са производом разлика

$48-7\,|\,2\times 7 = 41\,|\,14 \Rightarrow 41:2\,|\,14 = 20\tfrac{1}{2}\,|\,14 = 20\,|\,50+14 = 20\,|\,64 = 2064$.

Слично можемо да посматрамо и бројеве који су близу неке друге базе на пример 30

$$\begin{array}{ll} 27 & +3 \\ \hline 23 & +7 \end{array}$$

Радимо као да је база 10 па други део резултата има једно место

$$\begin{array}{ll} 27 & +3 \\ 23 & +7 \\ \hline \end{array}$$

$27-7\,|\,3\times 7 = 20\,|\,{}_{2}1.$

Како је база три пута већа од 10, први део резултата помножимо са 3 и том броју додамо пренос 2 из другог дела

$27-7\,|\,3\times 7 = 20\,|\,{}_{2}1 \Rightarrow 20\times 3\,|\,{}_{2}1 = 60\,|\,{}_{2}1 = 62\,|\,1 = 621.$

Овај метод множења се базира на једноставној алгебарској једнакости:

$$(x-a)\cdot(x-b) = x^2 - ax - bx + ab = x\cdot(x-a-b) + ab$$

где је x база са којом се ради.

Добро, све је ово лепо али шта ако се ради о бројевима који нису близу некој бази, на пример 23 и 78? Ево решења!

Напишемо их један испод другог

23
78

А затим формирамо редом с десна у лево (може и обрнуто) низ правоугаоника као на слици

23	23	23
78	78	78

Подвучемо бројеве

$$\begin{array}{l} 23 \\ 78 \\ \hline \end{array}$$

и множимо унутар правоугаоника усправно и унакрсно а резултате сабирамо као што следи

$3\times 8 = {}_{2}4$

$$\begin{array}{l} 23 \\ 78 \\ \hline \end{array}$$

${}_{2}4$

$2\times 8+3\times 7={}_{3}7$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 78 \\ \hline {}_{3}7{}_{2}4 \end{array}$$

$2\times 7={}_{1}4$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 78 \\ \hline 14{}_{3}7{}_{2}4 \end{array}$$

На крају додамо пренете цифре на одговарајућа места

$14{}_{3}7{}_{2}4=1794$

На исти начин можемо помножити било која два броја. Решење ће бити написано у једном реду јер све ове радње можемо, уз мало вежбе, радити без писања. Ако се ради о бројевима са различитим бројем цифара само додамо потребан број нула испред броја са мањим бројем цифара. Ево још једног примера

$$\times\begin{array}{r} 21343 \\ 43812 \\ \hline \end{array}$$

$2134\boxed{3}$	$213\boxed{43}$	$21\boxed{343}$	$2\boxed{1343}$	$\boxed{21343}$	$\boxed{2134}3$	$\boxed{213}43$	$\boxed{21}343$	$\boxed{2}1343$
$4381\boxed{2}$	$438\boxed{12}$	$43\boxed{812}$	$4\boxed{3812}$	$\boxed{43812}$	$\boxed{4381}2$	$\boxed{438}12$	$\boxed{43}812$	$\boxed{4}3812$

$3\times 2=6$

$$\times\begin{array}{r} 21343 \\ 43812 \\ \hline 6 \end{array}$$

$3\times 1+4\times 2={}_{1}1$

$$\times\begin{array}{r} 21343 \\ 43812 \\ \hline {}_{1}16 \end{array}$$

$3\times 2+3\times 8+4\times 1={}_{3}4$

$$\begin{array}{r} 21343 \\ \times\ 43812 \\ \hline {}_{3}4{}_{1}16 \end{array}$$

$$1\times 2+3\times 3+3\times 1+4\times 8={}_{4}6$$

$$\begin{array}{r} 21343 \\ \times\ 43812 \\ \hline {}_{4}6{}_{3}4{}_{1}16 \end{array}$$

$$2\times 2+3\times 4+1\times 1+4\times 3+3\times 8={}_{5}3$$

$$\begin{array}{r} 21343 \\ \times\ 43812 \\ \hline {}_{5}3{}_{4}6{}_{3}4{}_{1}16 \end{array}$$

$$2\times 1+4\times 4+1\times 8+3\times 3={}_{3}5$$

$$\begin{array}{r} 21343 \\ \times\ 43812 \\ \hline {}_{3}5{}_{5}3{}_{4}6{}_{3}4{}_{1}16 \end{array}$$

$$2\times 8+3\times 4+1\times 3={}_{3}1$$

$$\begin{array}{r} 21343 \\ \times\ 43812 \\ \hline {}_{3}1{}_{3}5{}_{5}3{}_{4}6{}_{3}4{}_{1}16 \end{array}$$

$$2\times 3+1\times 4={}_{1}0$$

$$\begin{array}{r} 21343 \\ \times\ 43812 \\ \hline {}_{1}0{}_{3}1{}_{3}5{}_{5}3{}_{4}6{}_{3}4{}_{1}16 \end{array}$$

$$2\times 4=8$$

$$\begin{array}{r} 21343 \\ \times\ 43812 \\ \hline 8{}_{1}0{}_{3}1{}_{3}5{}_{5}3{}_{4}6{}_{3}4{}_{1}16 \end{array}$$

$$8{}_{1}0{}_{3}1{}_{3}5{}_{5}3{}_{4}6{}_{3}4{}_{1}16=935079516$$

Сва ова множења и сабирања, уз мало вежбе, могу се извести напамет и решење се пише само у једном реду.

Овај начин множења није ништа другачији од класичног, сем што се на уочљивији начин формирају низови цифара чији збир одређује цифру на одговарајућој позицији у броју, па све може да се скоро напамет израчуна.

Како би смо израчунали квадрат неког броја који се завршава цифром 5? Ево, на пример броја 35:

$$35^2 = 3\times(3+1)\,|\,25 = 12\,|\,25 = 1225,$$

или броја 75:

$$75^2 = 7\times(7+1)\,|\,25 = 56\,|\,25 = 5625,$$

или чак броја 125:

$$125^2 = 12\times 13\,|\,25 = 156\,|\,25 = 15625.$$

Ово је посебан случај множења два броја код којих збир бројева од последњих неколико цифара јесте неки степен броја 10, а претходне цифре се поклапају. На пример

$$73\times 77 = 7\times 8\,|\,3\times 7 = 56\,|\,21 = 5621,$$

или

$$743\times 757 = 7\times 8\,|\,43\times 57 = 56\,|\,2451 = 562451,$$

или

$$21343\times 21657 = 21\times 22\,|\,343\times 657 = 462\,|\,225351 = 462225351.$$

Одговарајућа алгебарска подлога је једнакост:

$$(bx+a)\cdot(bx+x-a) = b^2x^2 + bx^2 - bax + bax + ax - a^2 = b\cdot(b+1)x^2 + a\cdot(x-a).$$

3. **НЕКЕ ПРИМЕНЕ ДЕЉЕЊА**

За операцију дељења, такође, постоје разне једноставније методе од класичног начина дељења. Мало су теже од метода за множење, па се нећемо тиме детаљније овде бавити, али ево неких интересантних. Претпоставимо да треба разломак 1/19 записати у децималном запису. На класичан начин би требало да поделимо 1 са 19, али ми ћемо то овако да урадимо:

Разлика имениоца и бројиоца је 18, дакле у резултату ће се појавити 18 цифара иза зареза пре понављања, а последња цифра у низу ће бити 1 јер се делилац завршава на 9. Дакле, крајње десно пишемо 1, а затим ту цифру множимо са бројем за 1 већим од прве цифре у делиоцу а то је 1, значи множимо са 2 број 1, то је 2 и 2 пишемо поред 1 улево

2 1

Наставимо даље, множимо сада 2 са 2 то је 4 и пишемо улево

4 2 1

8 4 2 1

Сада 8 пута 2 је 16, пишемо 6 а 1 као префикс за пренос улево

${}_{1}6$ 8 4 2 1

Даље, 6 пута 2 је 12 и један пренос то је 13, пишемо 3 , префикс 1

${}_{1}3$ ${}_{1}6$ 8 4 2 1

Настављајући тако све до осамнаесте цифре добићемо

${}_{1}0$ 5 ${}_{1}2$ 6 3 ${}_{1}1$ ${}_{1}5$ ${}_{1}7$ ${}_{1}8$ 9 ${}_{1}4$ 7 ${}_{1}3$ ${}_{1}6$ 8 4 2 1

Па је 1/19=0. 052631578943684 21... . Интересантно је да када овај низ цифара поделимо на два низа од по 9 цифара увек је збир одговарајућих цифара 9, тако да посао можемо двоструко смањити. Још нешто и то оно најважније, можемо приметити а то је да нигде нисмо ништа делили. Слично можемо поступити и када је делилац нпр. 29.

1/29=0, 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 ${}_{1}9$ ${}_{1}6$ ${}_{1}5$ 5 ${}_{2}1$ 7 ${}_{1}2$ 4 ${}_{1}1$ ${}_{2}3$ ${}_{2}7$ 9 3 1

4. КУБНИ КОРЕН

За крај смо оставили мађионичарски трик. Затражите од посетилаца да Вам кажу неки природан број до 1000000 који је потпуни куб. Ви пре него што ико из публике успе да притисне дугме на калкулатору за кубни корен запишете решење на табли. Ево у чему је тајна:
Запамтите таблицу кубова цифара, посебно које су последње цифре у резултатима

$1^3 = 1$

$2^3 = 8$

$3^3 = 27$

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$

$7^3 = 343$

$8^3 = 512$

$9^3 = 729$

Лако се памти, а затим добијени број поделите у групе по три цифре с десна улево. Задња цифра резултата је одговарајућа цифра из табеле која се односи на групу с десна а прва је мања цифра која одговара другој групи цифара колико год да их има. На пример $\sqrt[3]{474552}$, $474\,|\,552$, задња цифра у делу 552 је 2 а њој одговара 8 из табеле па је друга цифра резултата 8. Први део 474 је између 343 и 512 па је прва цифра резултата она из табеле која одговара 343 а то је 7 па је одговор 78. Дакле, $\sqrt[3]{474552} = 78$. Пробајте, уз мало вежбе можете да фасцинирате пријатеље.

5. УМЕСТО ЗАКЉУЧКА

Овде смо само мало одшкринули врата која би, можда, могла да воде у заиста изненађујуће начине рачунања у разним областима математике које нам нуди ведска математика. Можда није практично примењива у савременој ери техничких достигнућа, али свакако може допринети бољем разумевању математике али и науке уопште јер примењујући је тера човека на размишљање. Све ове методе се углавном изводе ментално, скоро без записивања па самим тим мозак се тренира да боље размишља. Неке земље је имају у редовној настави а неке имају експерименталне програме по школама, па и на неким универзитетима (Индија, Велика Британија, Хрватска, итд.). Код нас аутор није успео да нађе ниједан иоле квалитетан текст на ову тему

6. ЛИТЕРАТУРА

1. J.T. Glover, *Vedic mathematics for schools book 1*, Delhi, 1995.
2. Jagadguru Sankaracarya Sri Bharati Krsna Tirtha Maharaja, *Vedic mathematics or sixteen simple mathematical formulae from the Vedas*, Varanasi, 1965.
3. Lilavati Bhaskaracarya, *A treatise of mathematics of vedic tradition*, Delhi, 2001. (translation)
4. Havier Roche, *Vedic Mathematics secrets*, 2005.